

Когда в задачах рассматриваются многошаговые процессы, шаги удобно заносить в таблицу; это позволяет нигде не сбиться, ничего не упустить из виду, а при необходимости вернуться к какому-либо шагу.


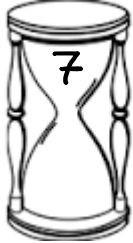

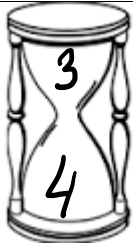



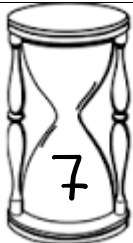
Пример 1. У Корнея есть песочные часы: одни могут отмерять 4 минуты, а другие — 7 минут. Корней хочет с помощью этих часов отмерить 10 минут, чтобы за это время сварить яйцо. Как ему это сделать?

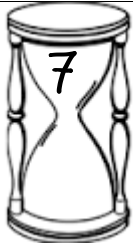
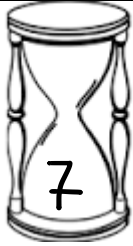
Решение. Требуется из слагаемых 7 и 4 составить сумму 10. Если бы слагаемые можно было брать со знаком «минус», это было бы легко сделать:

$$10 = 7 + 7 - 4.$$

Но как отмерить -4 минуты?

Запишем шаги этого процесса в таблицу.

Номер шага	Песок в 4-минутных часах	Песок в 7-минутных часах
1		
2		
3. Начало варки яйца. Четырехминутные часы больше не трогаем		
4.		

5	—	
6	—	

Таблицы удобно составлять для решения задач о переливаниях. Но ещё удобнее задачи о переливаниях решать с помощью графов.

Пример 2. У Пантелея есть ведро объемом 8 л и ведёрко объемом 5 л. Он стоит на берегу ручья и собирается отмерить 1 л воды. Как ему поступить?

Решение. Будем считать, что на координатной плоскости каждая точка обозначает состояние обоих вёдер: первая координата — объём воды в 8-литровом ведре, вторая координата — в 5-литровом ведёрке. Все события в задаче будут происходить внутри и на границе прямоугольника 8×5 , левая нижняя вершина которого находится в начале координат.

Первое состояние — точка A_1 в начале координат, оба ведра пусты. Стартовав отсюда, проведем линию вправо до границы прямоугольника, в точку $A_2(8; 0)$. Эта линия означает, что Пантелей налил воды в 8-литровое ведро.

Затем проведем линию до границы прямоугольника по диагоналям клеточек влево-вверх. Попадём в точку $A_3(3; 5)$. Эта линия соответствует переливанию воды из ведра в ведёрко.

Вылить из последнего воду — значит провести линию строго вниз; опять-таки до границы прямоугольника, в точку $A_4(3; 0)$.

Будем продолжать эту процедуру, проводя каждый раз линию до границы прямоугольника или вправо, или вниз, или вверх-влево по

Составим таблицу, в которой шесть столбцов, соответствующих городам, и шесть строк, соответствующих участникам конференции. Будем читать условие задачи, вычлняя из него по одному отдельные утверждения. Информацию из каждого утверждения будем заносить в таблицу.

1. На конференции по математической логике встретились Авдей, Бармалей, Варфоломей, Гордей, Дорофей и Еремей. По именам участников назовем строки таблицы.
2. Они приехали из Москвы, Норильска, Омска, Пскова, Рязани и Саратова. По названиям городов назовем столбцы таблицы.
3. Авдей и москвич специализируются в теории множеств. Ясно, что Авдей не москвич, поэтому поставим в клетке АМ знак «—». Вот что у нас получится.

	М	Н	О	П	Р	С
А	—					
Б						
В						
Г						
Д						
Е						

4. Дорофей и пскович специализируются в модальной логике. Отсюда следует, что Дорофей не из Пскова. Кроме того, у персонажей из предыдущего утверждения была другая специализация; это значит, что персонажи А, М, Д и П — четыре разных человека. Занесем и эту информацию в таблицу, поставив знаки «—» в соответствующие клетки:

	М	Н	О	П	Р	С
А	—			—		
Б						

В						
Г						
Д	—			—		
Е						

5. *Варфоломей и саратовец специализируются в булевой алгебре. Ясно с учетом предыдущих двух утверждений можно сделать вывод, что В, С, А, М, Д и П — шесть разных человек, то есть все персонажи задачи. Поставим в нужные клетки знаки «—», чтобы отметить невозможные соответствия. Вот что у нас получится.*

	М	Н	О	П	Р	С
А	—			—		—
Б						
В	—			—		—
Г						
Д	—			—		—
Е						

6. *Рязанец младше Авдея, а омич младше Варфоломея. Отметим, что Авдей не из Рязани, а Варфоломей — не из Омска:*

	М	Н	О	П	Р	С
А	—			—	—	—
Б						
В	—		—	—		—
Г						
Д	—			—		—
Е						

7. *Бармалей и москвич преподают в университетах, а Варфоломей и рязанец — нет. Как и раньше, заключаем, что Б, М, В и Р — разные люди; отметим в таблице и это.*

	М	Н	О	П	Р	С
--	---	---	---	---	---	---

А	—			—	—	—
Б	—				—	
В	—		—	—	—	—
Г						
Д	—			—		—
Е						

Теперь по таблице видно, что Варфоломей приехал из Норильска, — других возможностей для него не осталось. Поставим поэтому «+» в клетку ВН. Отметим еще минусами столбце Н, что другие участники не из этого города:

	М	Н	О	П	Р	С
А	—	—		—	—	—
Б	—	—			—	
В	—	+	—	—	—	—
Г		—				
Д	—	—		—		—
Е		—				

В строке А осталось незаполненной одна клетка. Поставим туда плюс, ведь Авдей приехал из Омска — больше неоткуда. Затем остальные клетки в столбце О отметим минусами, в знак того, что из этого города участников больше нет:

	М	Н	О	П	Р	С
А	—	—	+	—	—	—
Б	—	—	—		—	
В	—	+	—	—	—	—
Г		—	—			
Д	—	—	—	—		—
Е		—	—			

Можно ли еще какие-нибудь выводы сделать по таблице? Можно!
Дорофей мог приехать только из Рязани, и больше оттуда никто не мог приехать:

	М	Н	О	П	Р	С
А	—	—	+	—	—	—
Б	—	—	—		—	
В	—	+	—	—	—	—
Г		—	—		—	
Д	—	—	—	—	+	—
Е		—	—		—	

Почти заполненных строк или столбцов больше не осталось; поэтому продолжим читать условие.

8. Бармалей и Еремей прибыли на конференцию на поездах, а саратовец — на автомобиле. Это означает, что эти двое не из Саратова:

	М	Н	О	П	Р	С
А	—	—	+	—	—	—
Б	—	—	—		—	—
В	—	+	—	—	—	—
Г		—	—		—	
Д	—	—	—	—	+	—
Е		—	—		—	—

Похоже, что из Саратова приехал Гордей. Поставим плюс в клетку ГС и отметим минусами, что из других городов он не приехал:

	М	Н	О	П	Р	С
А	—	—	+	—	—	—
Б	—	—	—		—	—
В	—	+	—	—	—	—
Г	—	—	—	—	—	+

Д	—	—	—	—	+	—
Е		—	—		—	—

Задача почти решена. Осталось отметить, откуда приехали Еремей с Бармалеем, и таблица заполнится целиком:

	М	Н	О	П	Р	С
А	—	—	+	—	—	—
Б	—	—	—	+	—	—
В	—	+	—	—	—	—
Г	—	—	—	—	—	+
Д	—	—	—	—	+	—
Е	+	—	—	—	—	—

Ответ. Авдей из Омска, Бармалей из Пскова, Варфоломей из Норильска, Гордей из Саратова, Дорофей из Рязани; Еремей из Москвы.

В следующей задаче нужно установить соответствия между элементами трёх множеств. Трёхмерную таблицу нарисовать сложно, поэтому будем использовать граф.

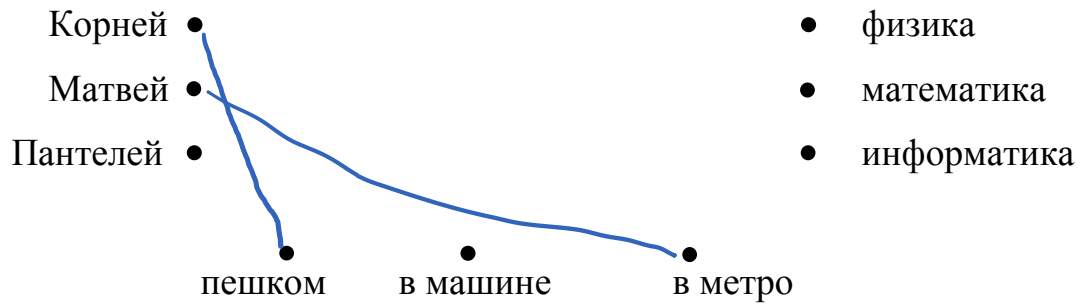
Пример 4. Корней, Матвей и Пантелей преподают физику, математику и информатику. На работу один из них идет пешком, другой едет на машине, а третий — в метро.

Корней добирается на работу на транспорте, Матвей — не в метро. Тот, кто приезжает в метро, преподаёт информатику. Тот, кто не пользуется транспортом, не преподаёт физику, Матвей не преподаёт математику. Кто какой предмет преподаёт и как добирается на работу?

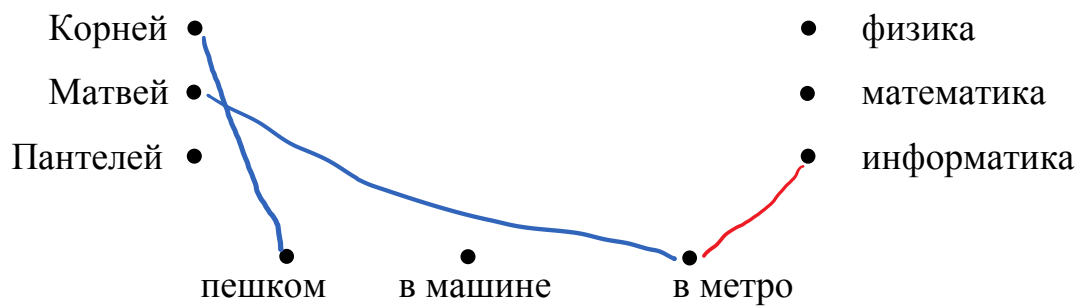
Решение.

Слева отметим точками персонажей задачи, справа — предметы, которые они преподают, а внизу — как добираются до работы. Будем читать условие задачи, вычлняя из него по одному отдельные утверждения. Информацию из каждого утверждения будем отмечать линиями красного цвета для установленных соответствий, а синего — для несоответствий.

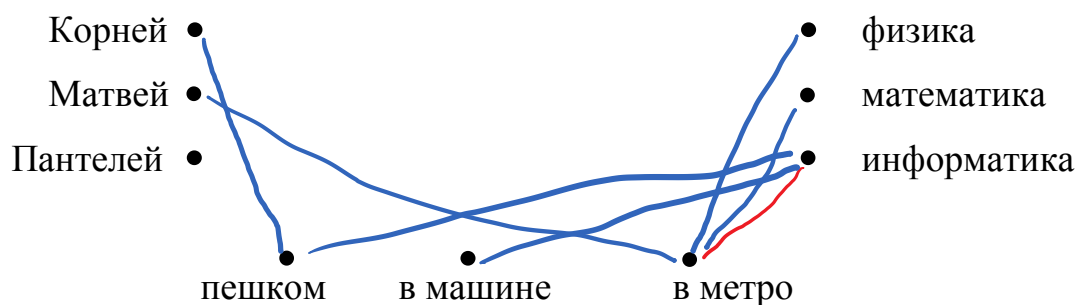
1. *Корней* добирается на работу на транспорте. Непонятно, каким транспортом пользуется Корней, но он уж точно не ходит на работу пешком. Отметим эту информацию синей линией. Точно так же отметим, что *Матвей* не ездит в метро.



2. Тот, кто приезжает в метро, преподает информатику. Это установленное соответствие, отметим его красным.

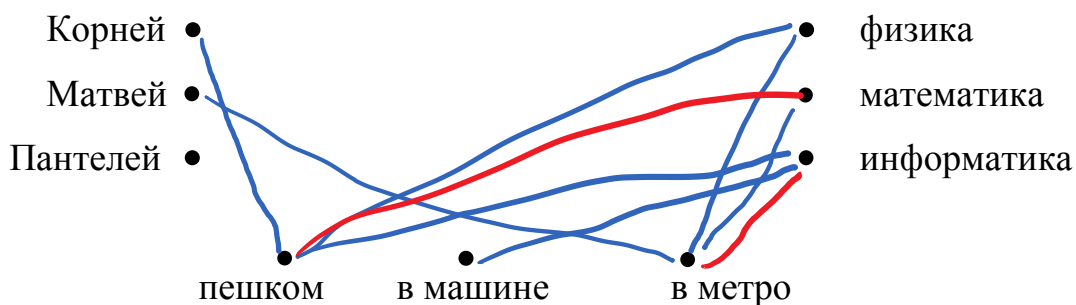


Теперь мы можем заключить, что тот человек, который ездит в метро, не преподает физику и математику; а тот, который преподает информатику, не ездит в машине и не ходит пешком. Отметим эти выводы на графе синим цветом.

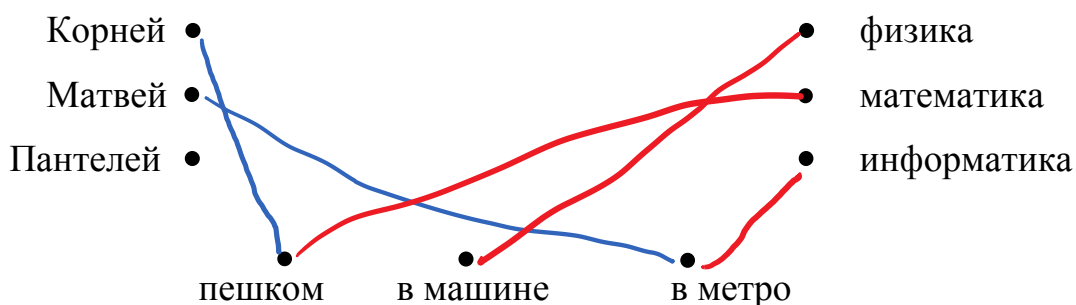


3. *Тот, кто не пользуется транспортом, не преподает физику.*

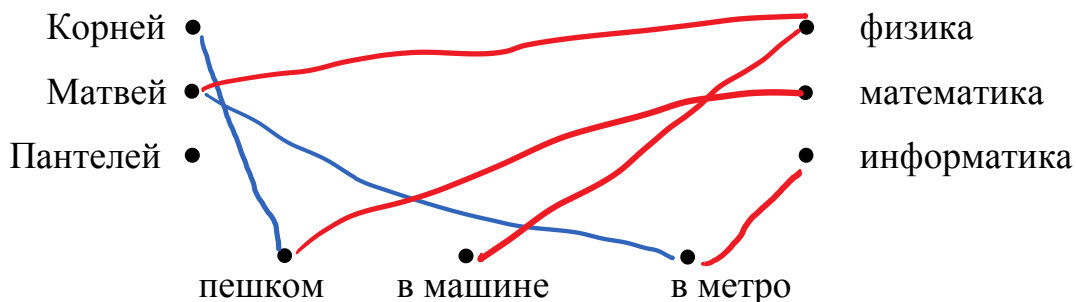
Обозначим эту информацию на графе синей линией и заметим, что для пешехода осталась только одна возможность — он преподает математику. Отметим красным.



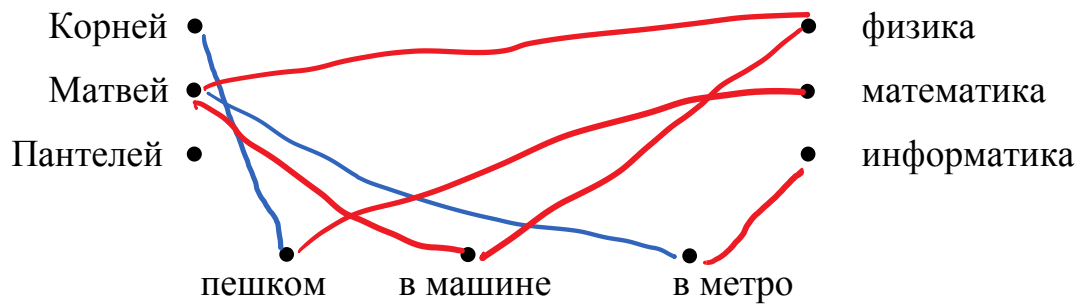
Теперь ясно, что преподаватель физики ездит в машине. Мы установили все соответствия в парах предмет—способ добраться. Поэтому синие линия для несоответствий в таких парах можно убрать. Вот что получится.



4. *Матвей не преподает математику.* По графу видно еще, что он не преподает информатику, так как не ездит в метро. Значит, Матвей преподает физику.



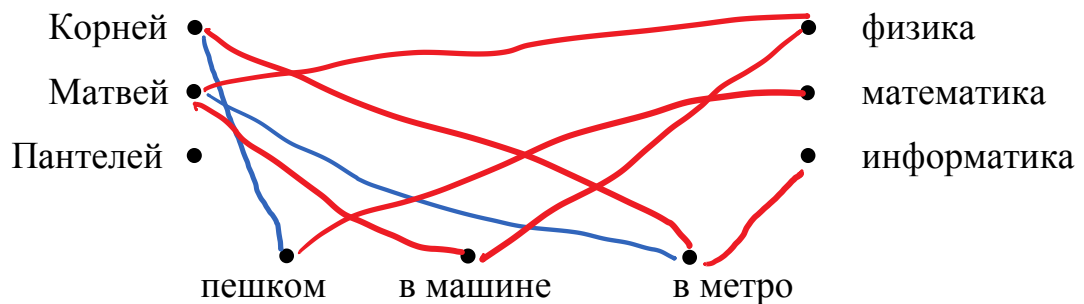
Красные линии показывают теперь, что Матвей ездит на работу в машине.



Красные линии показывают теперь, что Матвей ездит на работу в машине.

Для него мы установили все соответствия. О Пантелее сказать пока ничего нельзя, поэтому надо подумать о Корнее. Какой предмет он преподает? Каким транспортом пользуется?

С транспортом просто: Корней не ходит пешком и не ездит на машине; значит, он ездит в метро.



А раз так, то Корней преподает информатику. Для него мы тоже установили все возможные соответствия.

Что осталось Пантелею? Он ходит пешком и преподает математику.

Ответ. Корней преподает информатику и ездит в метро; Матвей преподает физику и ездит в машине; Пантелей ходит пешком и преподает математику.

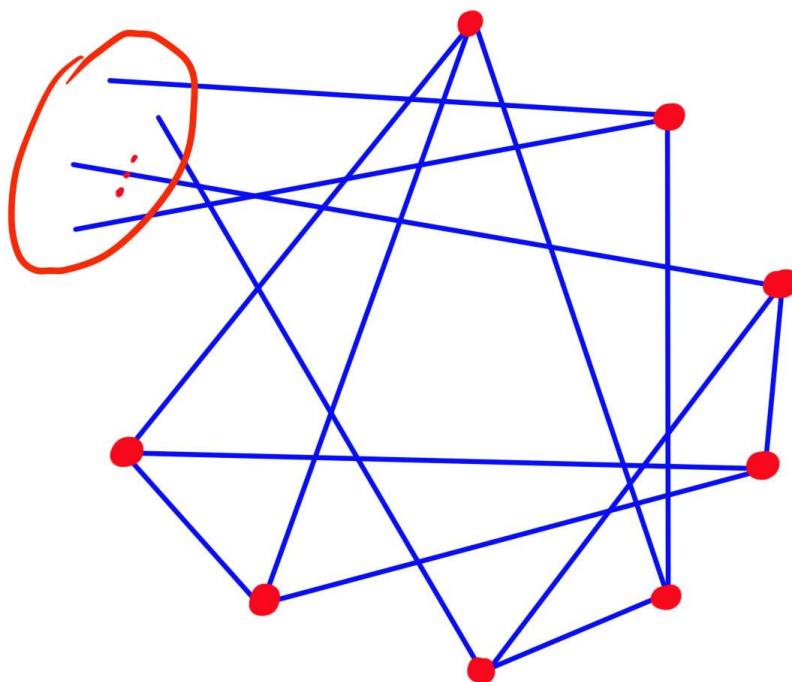
В предыдущем примере с помощью графа мы отмечали соответствия между элементами множеств. Такие графы помогают и в тех задачах, в которых требуется не установить все соответствия, а подсчитать их количество.

Пример 5. Может ли каждый ученик в классе дружить ровно с тремя другими учениками, если в классе 25 человек?

Решение.

Обозначим каждого ученика точкой; всего отметим 25 точек. Если два ученика дружат, соединим соответствующие точки отрезком. На рисунке отмечены не все точки и не все отрезки; важно, что по условию задачи каждая точка является концом трех отрезков. Сколько же у всех вместе отрезков концов?

$$3 \cdot 25.$$



У каждого отрезка по два конца, поэтому всего должно получиться $3 \cdot 25/2$ отрезков. Но это нецелое число, поэтому ситуация, описанная в задаче, невозможна.

Ответ. Не может.